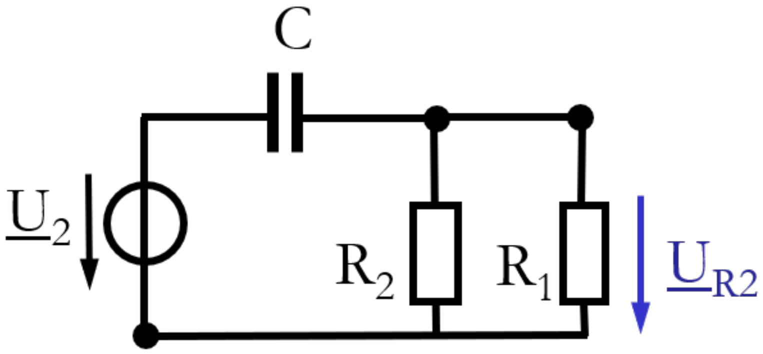
Exercices chapitre 3 – série 3

Enoncés

Exercice I.

On cherche à relier la tension U_{R2} à U_2 dans le circuit suivant (ce circuit illustrera le principe de superposition avec les phaseurs).

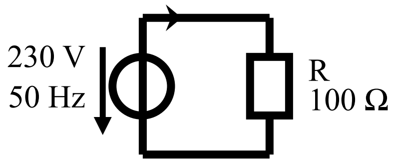


Exercice II. (courant, tension et puissance en régime sinus)

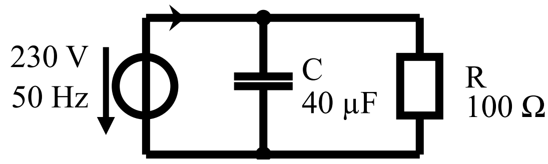
Pour chacun des circuits suivants, calculez :

- L'admittance (en complexe) (on pourrait aussi calculer l'impédance).
- Le courant efficace.
- Le déphasage entre le courant et la tension.
- La puissance moyenne fournie par le réseau.

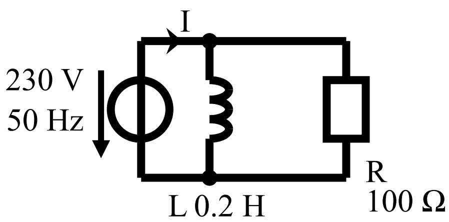
Commentez les valeurs obtenues pour les cas b), c) et d) vis-à-vis du cas a).



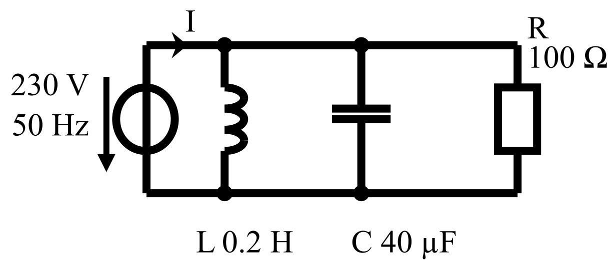
a)



b)



c)



d)

Exercice III. (courant, tension et puissance en régime sinus)

Pour chacun des circuits suivants, calculez :

- L'impédance équivalente de la partie encadrée (on pourrait aussi calculer l'admittance).

- L'impédance du circuit.

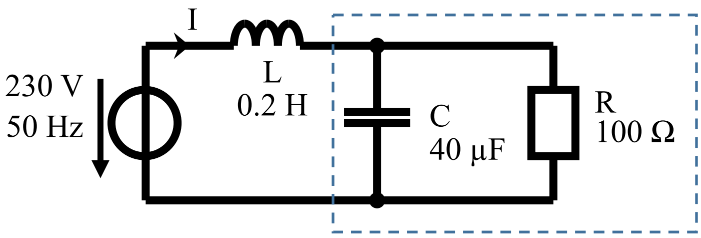
- Le courant efficace.

- Le déphasage entre le courant et la tension.

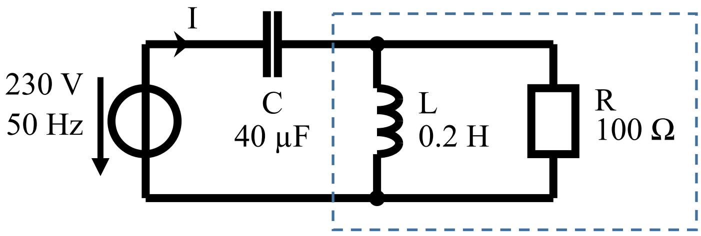
- La puissance moyenne fournie par le réseau. Commentez par rapport à l'exercice I.

- En calculant la tension efficace U_{R-eff} aux bornes de la résistance, calculez la puissance moyenne dissipée par la résistance. Qu'en déduisez-vous ?

a)



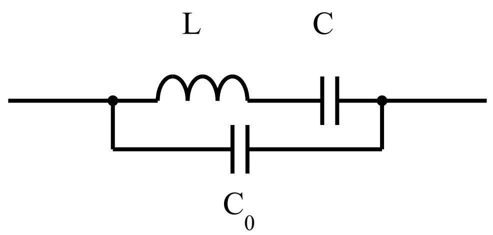
b)



Exercice IV. (Impédance équivalente du quartz)

Un quartz est un cristal qui a des propriétés piezo-électriques, c'est-à-dire qu'il se déforme si on applique une tension électrique à ses bornes (très faible déformation… 10^{-12} m/V), et réciproquement il va créer une différence de potentiel si on le déforme mécaniquement (ce qui est à l'origine de l'étincelle électrique des briquets qui génèrent un choc 'violent' sur un cristal de quartz… plusieurs milliers de volts si on déforme le cristal de seulement 1 nanomètre).

De par leurs propriétés electro-mécaniques, ces éléments sont très utilisés dans les oscillateurs car ils dissipent très peu d'énergie. Pour prédire le comportement des circuits, on utilise un modèle équivalent comme celui-ci-dessous qui rend assez bien compte de leurs propriétés en fréquence.



1) Etablir l'expression de l'impédance Z en fonction de ω .
2) Déterminez la fréquence f_s ,dite de résonance série, pour laquelle l'impédance est nulle.
3) Déterminez la fréquence f_p ,dite de résonance parallèle, pour laquelle l'impédance est infinie.
4) Exprimez la relation qui existe entre ces 2 fréquences. Que remarquez-vous ?
   Si $C_0 >> C$, donnez une solution approchée.

   Exemple numérique: C_0 = 4.3 pF, L = 17 mH, C = 19 fF (femto = 10^{-15})

5) Quelle est la puissance moyenne sur une période d'oscillation qui sera dissipée par ce circuit ? Commenter.

Exercice V. (Exercice plus difficile – Optionnel)

On cherche à déterminer la fonction $\underline{U}_L/\underline{U}_S$ du circuit suivant.

Le rectangle bleu modélise un amplificateur de tension inverseur, c'est à dire avec un gain en tension réel négatif. Le losange est la source de tension commandée.

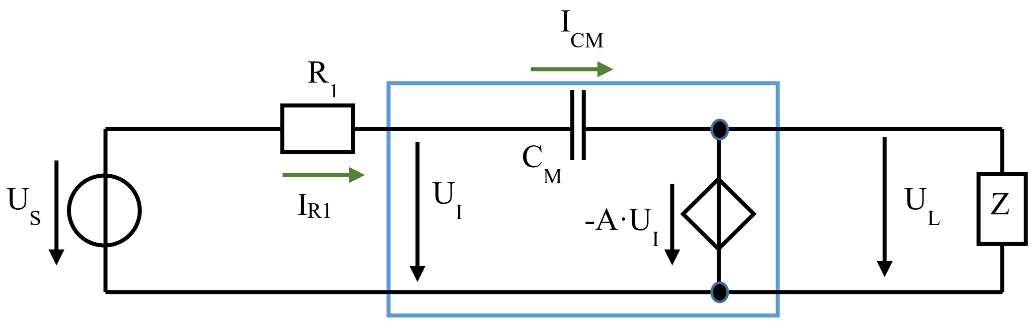
Pour simplifier la notation, on utilisera la notation U à la place de $\underline{\boldsymbol{U}}$.

Exprimez le courant I_{R1} en fonction de U_S et U_I

1) Exprimez le courant I_{CM} en fonction de U_L et U_I
2) Que peut-on dire des courants I_{R1} et I_{CM} ? Ecrire cette relation. Utiliser le fait qu'on a un amplificateur, c'est-à-dire que U_L et U_I sont liés.
3) En déduire la fonction $\frac{U_L}{U_S}(\omega)$.

   Définir une fréquence angulaire de coupure ω_C de sorte que l'on ait $\frac{U_L}{U_S}(\omega) = \frac{-A}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_C}\right)}$
4) Est-ce que U_L va dépendre de l'impédance de sortie ?

5) Si Z est à présent une résistance R = 1 kΩ, déterminez l'amplitude et le déphasage du signal U_L si le signal de source est un sinus de tension de crête 0.1 V avec R_1 = 10 kΩ, C_M = 16 pF et A = 100 pour les fréquences suivantes : 1 kHz, 10 kHz et 100 kHz

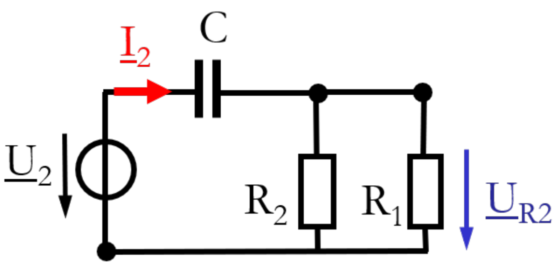


Exercices –Chapitre 3 – série 3

Corrigés

Exercice I .

Il s'agit de trouver la tension U_{R2} en fonction de U_2



On remarque que les résistances R_1 et R_2 sont en parallèle, et le tout est en série avec la capacité.

$$\underline{U}_{R2} = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}\underline{I}_2 = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}}{\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}+\frac{1}{j\omega C}}\underline{U}_2$$

$$\underline{U}_{R2} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{j\omega C}}\underline{U}_2 == \frac{1}{1+\left(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}\right)\frac{1}{j\omega C}}\underline{U}_2$$

Par rapport au transparent du cours, on obtient donc la contribution à U_{R2} provenant de U_2 uniquement.

$$\underline{U}_{R2} = \frac{j\omega\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C}{1+j\omega\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C}\underline{U}_2$$

Exercice II.

(courant, tension et puissance en régime sinus) **(on rappelle que $\boldsymbol{\omega = 2\pi f}$)**

La puissance moyenne en régime sinusoidal est donnée par :

$$P = U_{eff}\, I_{eff} \cos\left(Arg(\underline{Z})\right) = U_{eff}\, I_{eff} \cos\left(Arg(\underline{Y})\right)$$

Avec la relation $U_{eff} = |\underline{Z}|\, I_{eff}$, ou de façon équivalente $I_{eff} = |\underline{Y}|\, U_{eff}$

Il s'agit donc de déterminer le phaseur impédance complexe $\underline{Z}$ ou $\underline{Y}$

- **Circuit a)** : $\underline{Y} = 1/R$, donc $Arg(\underline{Y}) = 0\ deg$, et $P = U_{eff}\, I_{eff}$

  $U_{eff} = 230\ V$ et $I_{eff} = 2.3\ A$, ce qui donne $P = 529\ Watts$

- **Circuit b)** : $\underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\omega = 0.01 + j\ 0.0126$.

  Connaissance le phaseur $\underline{Y}$ (ou $\underline{Z}$), on a à la fois le courant efficace et la valeur du déphasage :

  $|\underline{Y}| = \sqrt{0{,}01^2 + 0{,}0126^2} = 0.0161\ \Omega^{-1}$,

  $I_{eff} = |\underline{Y}|\, U_{eff} = 3{,}7\ A$ et $Arg(\underline{Y}) = arctg\left(\frac{0.0126}{0.01}\right) = 51{,}6\ deg$

  Ce qui donne une puissance moyenne $P = U_{eff}\, I_{eff} \cos 51{,}6° = 529\ Watts$.

  On remarque que c'est la même puissance que le cas où il n'y avait que la résistance. En effet, la capacité en parallèle ne dissipe en moyenne aucune énergie sur une période.

- **Circuit c)** : $\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} = \frac{1}{R} - \frac{j}{L\omega} = 0.01 - j\ 0.0159$.

  $|\underline{Y}| = 0.0188\ \Omega^{-1}$, $I_{eff} = |\underline{Y}|\, U_{eff} = 4{,}32\ A$

  $Arg(\underline{Y}) = arctg\left(-\frac{0.0159}{0.01}\right) = -57{,}8\ deg$

  Ce qui donne une puissance moyenne $P = U_{eff}\, I_{eff} \cos 57{,}8° = 529\ Watts$.

  Là aussi, l'inductance ne dissipe aucune énergie sur une période.

- **Circuit d)** : $\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = 0.01 - j\ 0.0159 + j\ 0.0126 = 0.01 - j\ 0.0033$.

  $|\underline{Y}| = 0.0105\ \Omega^{-1}$, $I_{eff} = |\underline{Y}|\, U_{eff} = 2{,}42\ A$

  $Arg(\underline{Y}) = arctg\left(-\frac{0.0033}{0.01}\right) = -18{,}26\ deg$

  Ce qui donne une puissance moyenne $P = U_{eff}\, I_{eff} \cos 18{,}26° = 529\ Watts$.

Même commentaire que dans les cas précédents.

Exercice III.

On adopte la même démarche que pour l'exercice I.

- **Circuit a)** :

On remarque que R et C sont en parallèle. L'élément équivalent aura pour impédance équivalente $\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R}+jC\omega}$

L'impédance totale sera donnée par :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{eq} + jL\omega = \frac{1}{\frac{1}{R}+jC\omega} + jL\omega = \frac{R}{1+jRC\omega} + jL\omega = \frac{R - RLC\omega^2 + jL\omega}{1+jRC\omega}$$

$$\underline{Z} = \frac{R + jL\omega\left(L - R^2C + L(RC\omega)^2\right)}{1+(RC\omega)^2} = 38.8 + j\,14.1$$

$$\left|\underline{Z}\right| = \sqrt{38{,}8^2 + 14{,}1^2} = 41{,}3\ \Omega$$

Connaissant $\underline{Z}$, on peut calculer le courant efficace:

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{|\underline{Z}|} = 5{,}57\ A \text{ et } Arg(\underline{Z}) = arctg\left(\frac{14{,}1}{38{,}8}\right) = 20\ deg$$

Ce qui donne une puissance moyenne $P = U_{eff}\, I_{eff} \cos 20° = 1200\ Watts$.

On remarque que cette fois ci, le circuit consomme davantage que celui avec la résistance seule.

- Tension efficace aux bornes de la résistance et puissance dissipée par la résistance.

L'impédance équivalente $\underline{Z}_{eq}$ est donnée par :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R}+jC\omega} = \frac{R}{1+jRC\omega} = \frac{R - jR^2C\omega}{1+(RC\omega)^2} = 38{,}77 - j\,48{,}72$$

La tension efficace U_{R-eff} aux bornes de la résistance est donc

$$U_{R-eff} = I_{eff}\left|\underline{Z}_{eq}\right|$$

On a $\left|\underline{Z}_{eq}\right| = 62{,}26\ \Omega$ ce qui donne $U_{R-eff} = 346{,}78\ V$

Ainsi, la puissance consommée par la résistance P_R sera (on note I_{R-eff} le courant efficace qui traverse la résistance) est:

$$P_R = U_{R-eff}\, I_{R-eff} = \frac{{U_{R-eff}}^2}{R} \cong 1200\ Watts \text{ (aux arrondis près).}$$

En réalité, l'association de l'inductance et de la capacité provoque une augmentation de la tension efficace aux bornes de la résistance. Donc, la consommation supplémentaire d'énergie par rapport à l'exercice I n'est toujours pas due à l'inductance ou la capacité, mais bien à la résistance qui 'voit' une tension efficace supérieur à 230 Volts.

-
-
- **Circuit b)** :

On remarque que R et L sont en parallèle. L'élément équivalent aura pour impédance équivalente $\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{jL\omega}}$

L'impédance totale sera donnée par :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{eq} + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{jL\omega}} + \frac{1}{jC\omega} = \frac{jLR\omega}{R+jL\omega} + \frac{1}{jC\omega} = \frac{jLR^2\omega + RL^2\omega^2}{R^2+L^2\omega^2} - \frac{j}{C\omega}$$
$$= \frac{RL^2\omega^2}{R^2+L^2\omega^2} + j\left(\frac{LR^2\omega}{R^2+L^2\omega^2} - \frac{1}{C\omega}\right) = 28{,}3 - j\,35.$$

$\left|\underline{Z}\right| = \sqrt{28{,}3^2+35^2} = 44{,}6\;\Omega$ et $Arg\left(\underline{Z}\right) = arctg\,\left(\frac{-35}{28{,}3}\right) = -50{,}6\;deg$

Le courant efficace est :

$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{|\underline{Z}|} = 5{,}16\;A$

Ce qui donne une puissance moyenne $P\; = U_{eff}\,I_{eff}\cos 20° = 753\;Watts.$

On remarque que ce circuit consomme moins que le circuit a).

- Tension efficace aux bornes de la résistance et puissance dissipée par la résistance.

L'impédance équivalente $\underline{Z}_{eq}$ est donnée par :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{jL\omega}} = \frac{jLR\omega}{R+jL\omega} = \frac{jLR^2\omega + RL^2\omega^2}{R^2+L^2\omega^2}$$
$$= \frac{RL^2\omega^2}{R^2+L^2\omega^2} + j\frac{LR^2\omega}{R^2+L^2\omega^2} = 28{,}3 + j\,45{,}04$$

La tension efficace U_{R-eff} aux bornes de la résistance est donnée par $U_{R-eff} = \; I_{eff}\left|\underline{Z_{eq}}\right|$

On a $\left|\underline{Z_{eq}}\right| = 53{,}2\;\;\Omega$ ce qui donne $U_{R-eff} = 274{,}5\;V$

La puissance consommée par la résistance est $\frac{{U_{R-eff}}^2}{R} \cong 753\;Watts$ (aux arrondis près).

Comparé au circuit a), le circuit b) va créer une tension plus basse aux bornes de la résistance R, raison pour laquelle ce circuit consomme moins d'énergie que celui avec la seule résistance.

Exercice IV

1) Impédance du quartz

On a L et C qui sont en série, ce qui donne une impédance équivalente $j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$

Cette impédance équivalente est ensuite mise en parallèle avec C_0, ce qui donne pour l'impédance totale :

$$Z_Q = \frac{1}{j\omega C_0 + \frac{1}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}} = \frac{1}{j\omega C_0 + \frac{j\omega C}{1-\omega^2 LC}} = \frac{1-\omega^2 LC}{j\omega(C_0 + C) - j\omega^3 LCC_0}$$

$$Z_Q = \frac{1-\omega^2 LC}{j\omega(C_0 + C)\left(1 - \omega^2 L\frac{CC_0}{C+C_0}\right)} = -j\frac{(1-\omega^2 LC)}{\omega(C_0 + C)\left(1 - \omega^2 L\frac{CC_0}{C+C_0}\right)}$$

2) Fréquence où l'impédance s'annule.

On a une impédance nulle $Z_Q = 0$ si on vérifie $1 - \omega^2 LC = 0$, et donc $\omega_S = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, ce qui donne une fréquence $f_S = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Avec les valeurs numériques, on trouve $f_s = 8.8556\ MHz$

A cette fréquence, le quartz se comporte comme un court-circuit, il n'introduit ni atténuation ni déphasage entre la tension à ses bornes et le courant qui le traverse.

3) Fréquence où l'impédance devient infinie.

On a une impédance infinie si $Z_Q = \infty$.

Cette situation se vérifie pour 2 conditions:

- $\omega = 0$, qui est une solution triviale . Ceci s'explique par le fait que l'on doit 'traverser' les 2 capacités C_0 et C qui ont une impédance infinie lorsque le potentiel à leur borne ne varie pas (un isolant sépare leurs électrodes).
- L'autre solution est donnée par $1 - \omega^2 L\frac{CC_0}{C+C_0} = 0$, ce qui donne $\omega_P = \frac{1}{\sqrt{L\frac{CC_0}{C+C_0}}}$, soit une fréquence $f_P = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\frac{CC_0}{C+C_0}}}$

On trouve $f_p = 8.8752\ MHz$

4) Relation entre les deux fréquences.

$$f_P = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\frac{CC_0}{C+C_0}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}\sqrt{\frac{C_0}{C+C_0}}} = f_S\sqrt{\frac{C+C_0}{C_0}} = f_S\sqrt{1+\frac{C}{C_0}}$$

On voit que l'écart entre les deux fréquences ne dépend pas de l'inductance, mais uniquement du rapport entre les 2 capacités.

Si on utilise les valeurs numériques, étant donné que C_0>>C, on peut approximer cette relation (1er ordre série de Taylor) :

$$f_P = f_s\sqrt{1+\frac{C}{C_0}} \cong f_s\left(1+\frac{C}{2C_0}\right)$$

Dans notre cas, les deux fréquences sont très proches. L'écart relatif est $\frac{f_P - f_s}{f_P}$=0,0022 (0,22 %)

5) La puissance moyenne est donnée par $P = U_{eff}\, I_{eff}\, cos\left(Arg\left(\underline{Z}\right)\right)$
   Or, $Arg\left(\underline{Z}\right) = -\pi/2$, car Z est un nombre imaginaire pur (et signe '-'), ce qui implique que la puissance moyenne sur une période sera nulle.
   Ce résultat est attendu car il n'y a aucune résistance, et ni l'inductance ni la capacité ne dissipent de l'énergie sur une période.

Exercice V.

1) On a la relation $I_{R1} = \frac{U_S - U_I}{R_1}$

(Si $U_S > U_I$, le courant est bien orienté dans le sens positif)

2) On a la relation $I_{CM} = j\omega\, C_m (U_I - U_L)$

3) Les courant I_{R1} et I_{CM} sont égaux, car il n'y a pas de connexion supplémentaire (la loi des nœuds est 'triviale'.

$$\frac{U_S - U_I}{R_1} = j\omega\, C_m (U_I - U_L)$$

On en déduit

$$U_S + \frac{U_L}{A} = j\omega\, R_1\, C_m \left(\frac{-U_L}{A} - U_L\right)$$

$$U_S = -U_L \left(\frac{1}{A} + j\omega\, R_1\, C_m \left(\frac{1}{A} + 1\right)\right)$$

Donc

$$A\, U_S = -\, U_L \big(1 + j\omega\, R_1\, C_m\, (A+1)\big)$$

Soit

$$U_L = U_S \frac{-A}{\big(1 + j\omega\, R_1\, C_m\, (A+1)\big)}$$

4) On en déduit que

$$\frac{U_L}{U_S}(\omega) = \frac{-A}{\big(1 + j\omega\, R_1\, C_m\, (A+1)\big)}$$

On peut introduire une pulsation de coupure $\omega_C = \frac{1}{R_1\, C_m\, (A+1)}$

Et également une fréquence de coupure $f_C = \frac{\omega_C}{2\pi}$

Ce qui donne dans notre cas :

$$\frac{U_L}{U_S}(\omega) = \frac{-A}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_C}\right)} = \frac{-A}{\left(1 + j\frac{f}{f_C}\right)}$$

$\frac{U_L}{U_S}$ dépendra peu de la fréquence jusqu'à une fréquence f_c dite de coupure, puis diminuera progressivement au delà de f_c.

5) Non, la tension U_L ne va pas dépendre de l'impédance de sortie Z car elle est imposée par une source de tension commandée (dont la tension ne dépend pas du courant qui la traverse).

6) Si $R_1 = 10$ kΩ, $C_M = 16$ pF et $A = 100$ on obtient :

$$\omega_C = \frac{1}{R_1\ C_m\ (A+1)} = 61881{,}18\ rd/sec$$

$$f_C = \frac{\omega_C}{2\pi} = \frac{1}{R_1\ C_m\ (A+1)} \cong 10^4 Hz$$

Donc

$$\frac{U_L}{U_S}(\omega f) = \frac{-100}{(1 + j\ 10^{-4} f\ )}$$

On pourrait aussi écrire

$$\frac{U_L}{U_S}(f) = \frac{-100\ (1 - j\ 10^{-4} f\ )}{(1 +\ 10^{-8} f^2\ )}$$

De cette expression, on en déduit la tension de crête et le déphasage :

On sait que la tension de crête est le module du phaseur tension : $\widehat{U_{L,S}} = |U_{L,S}|$

Par conséquent, on a

$$\widehat{U_L} = \widehat{U_S}\ \frac{100}{\sqrt{1 + 10^{-8}\ f^2}}$$

Et le déphasage Φ entre U_L et U_S est :

$$\emptyset = Arg\left(\frac{U_L}{U_S}(f)\right) = Arctg\ (-100) + Arctg\ (\frac{-10^{-4} f}{1}) = -180 + Arctg\ (\frac{-10^{-4} f}{1})$$

Le '-180' provient du signe '-' qui multiplie la fonction $\frac{U_L}{U_S}(f)$

On trouve les valeurs suivantes ($\hat{U}_S$ = 0.1 V) (aux arrondis près):

- f = 1 kHz $\hat{U}_L$ = 10 V   Φ = -186°
  (on remarque que le signal est bien amplifié 100 fois)

- f = f_C = 10 kHz $\hat{U}_L$ = 7.1 V   Φ = -225°
  (à la fréquence de coupure, le signal est amplifié de $100/\sqrt{2}$)

- f = 100 kHz $\hat{U}_L$ = 1 V   Φ = -264°
  (l'amplification n'est plus que de 10 à la place de 100)